



Шифр

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

25 ноября 2015 года

Тексты заданий для муниципального этапа олимпиады  
по МАТЕМАТИКЕ

**МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП  
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ  
ПО МАТЕМАТИКЕ  
2015/2016 УЧЕБНОГО ГОДА**

Комплект заданий для учеников 6 классов

| Номер задания | Баллы |
|---------------|-------|
| 1             |       |
| 2             |       |
| 3             |       |
| 4             |       |
| 5             |       |
| Общий балл    |       |

*Уважаемый участник Олимпиады!*

1. Решение математической задачи включает не только ответ, но и рассуждение, приводящее к этому ответу. Приведённый ответ без соответствующего рассуждения не может рассматриваться как решение задачи и оценивается не более чем 10 процентами полного балла за задачу (если только решение задачи не подразумевает приведение конкретного примера). Задача признается решённой, если в предложенном тексте достаточно явно изложены все идеи, необходимые для получения и обоснования ответа. В зависимости от того, насколько исчерпывающе эти идеи раскрыты, решённая задача оценивается от 50 до 100 процентов от полного балла.

2. Во время тура запрещается пользоваться справочной литературой, микрокалькуляторами, средствами мобильной связи.

3. В геометрических задачах допускается выполнение чертежей ручкой и/или «от руки», без использования чертёжных приборов. Использование чертёжных инструментов не запрещено.

4. При проверке оценивается только математическое содержание работы. Оценка не снижается за небрежность почерка, орфографические, грамматические и стилистические ошибки, грязь и т.п. (если они не препятствуют пониманию решения). Однако, аккуратное оформление улучшает понимание Вашего рассуждения и положительно сказывается на оценке жюри.

5. Задачи не обязательно решать в том порядке, в котором они указаны в тексте.

6. Все задачи равноценны и оцениваются из 7 баллов за задачу.

**Максимальная оценка — 35 баллов.**

**Время на выполнение заданий — 4 часа.**

***Желаем вам успеха!***

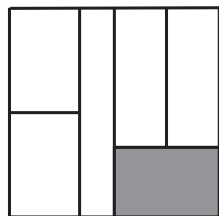
**6.1.** Замените каким-либо способом в примере на сложение десятичных дробей

$$0, ** + 0, ** + 0, ** + 0, ** = 1$$

каждую звёздочку цифрой 2 или цифрой 3 так, чтобы получилось верное равенство.

**6.2.** Ученики шестого класса отправились на праздник. У каждого мальчика было по 5 воздушных шариков, а у каждой девочки — по 4 шарика. По дороге дети стали баловаться и прокалывать шарики одноклассников. (Свои шарики дети, конечно же, не прокалывали.) В итоге каждая девочка проколола ровно один шарик, а каждый мальчик — ровно два шарика. Дима сосчитал все уцелевшие шарики, и у него получилось 100. Докажите, что Дима ошибся.

**6.3.** Петя, Коля и Вася стартовали одновременно в забеге на 100 метров и Петя пришёл первым. Когда Петя пробежал половину дистанции, Коля и Вася в сумме пробежали 85 метров. Известно, что скорость каждого из трех мальчиков постоянна на протяжении всей дистанции. Сколько метров в сумме осталось пробежать до финиша Коле и Васе, когда Петя пришёл к финишу? Ответ обоснуйте.



К условию  
задачи 6.4

**6.4.** Квадрат (см. рисунок) разрезали на прямоугольники. Оказалось, что площади всех шести отрезанных прямоугольников равны между собой. Найдите во сколько раз длинная сторона закрашенного прямоугольника больше его короткой стороны. Ответ обоснуйте.

**6.5.** В трёх ящиках лежат орехи. В первом на шесть орехов меньше, чем в двух других вместе, а во втором — на 10 меньше, чем в двух других вместе. Сколько орехов лежит в третьем ящике? Ответ обоснуйте.

**7.1.** Замените каким-либо способом в примере на сложение десятичных дробей

$$0, ** + 0, ** + 0, ** + 0, ** = 1$$

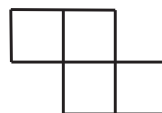
каждую звёздочку цифрой 2 или цифрой 3 так, чтобы получилось верное равенство.

**7.2.** В трёх ящиках лежат орехи. В первом на шесть орехов меньше, чем в двух других вместе, а во втором — на 10 меньше, чем в двух других вместе. Сколько орехов лежит в третьем ящике? Ответ обоснуйте.

**7.3.** Между домами четырёх гномов проложены прямые дороги, причём никакие три дома не расположены на одной прямой. Расстояние между домами Дока и Сони — 5 км, Дока и Ворчуна — 4 км, Сони и Простачка — 10 км, Ворчуна и Простачка — 17 км. Каким может быть расстояние между домами Сони и Ворчуна, если известно, что оно составляет целое число километров? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.

**7.4.** Трое учеников решали одинаковый тест, состоящий из нескольких задач. За правильный ответ к каждой задаче ученику ставилось два балла, за неправильный снимался один балл, а если ответ на задачу не был написан, то ставилось ноль баллов. Вместе эти трое учеников набрали ровно 100 баллов. Докажите, что кто-то из них при выполнении теста записал ответы не ко всем задачам.

**7.5.** У Миши и Маши в тетрадках было написано одно и то же многозначное целое число, оканчивающееся на 9876. Маша поставила плюс между третьей и четвёртой цифрами, считая справа, а Миша — между четвёртой и пятой, также считая справа. К удивлению школьников обе полученные суммы оказались одинаковы. Какое число было записано у школьников первоначально? Приведите все возможные варианты ответа и докажите, что других нет.



К условию  
задачи 7.6

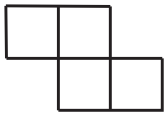
**7.6.** Сколькими способами можно расположить на шахматной доске (размер  $8 \times 8$  клеток) четырёхклеточный многоугольник в виде буквы Z (см. рисунок) так, чтобы он располагался точно по клеткам доски и в пределах доски? Четырёхугольник можно поворачивать и переворачивать. Ответ обоснуйте.

**8.1.** Пусть все числа  $x, y, z$  не равны нулю. Найти все значения, которые может принимать выражение

$$\left(\frac{x}{|y|} - \frac{|x|}{y}\right) \cdot \left(\frac{y}{|z|} - \frac{|y|}{z}\right) \cdot \left(\frac{z}{|x|} - \frac{|z|}{x}\right).$$

**8.2.** Петя и три его одноклассника стартовали одновременно в забеге на 100 метров, и Петя пришёл первым. Через 12 секунд после начала забега никто еще не финишировал, и все четыре его участника в сумме пробежали 288 метров. А когда Петя закончил бег, остальным трём его участникам осталось пробежать до финиша в сумме 40 метров. Сколько метров пробежал Петя за первые 12 секунд? Ответ обоснуйте. Предполагается, что каждый из участников забега бежал со своей постоянной скоростью.

**8.3.** Известные  $x, y$  и  $z$  связаны соотношением  $\frac{1}{xy} = \frac{y}{z-x+1} = \frac{2}{z+1}$ . Докажите, что в этом случае одно неизвестное является средним арифметическим двух других.



К условию задачи 8.4

**8.4.** Сколькими способами можно расположить на шахматной доске (размер  $8 \times 8$  клеток) четырёхклеточный многоугольник в виде буквы  $Z$  (см. рисунок) так, чтобы он располагался точно по клеткам доски и в пределах доски? Четырёхугольник можно поворачивать и переворачивать. Ответ обоснуйте.

**8.5.** Пусть точка  $D$  — середина медианы  $AF$  треугольника  $ABC$ ,  $E$  — точка пересечения прямой  $CD$  со стороной  $AB$ . Докажите, что если  $BD = BF = CF$ , то  $AE = DE$ .

**8.6.** Все натуральные числа от 1 до 20 разбили на пары и числа в каждой паре сложили. Какое наибольшее количество из получившихся десяти сумм может делиться на 11? Ответ обоснуйте.

**9.1.** На доске написаны четыре ненулевых числа, причём сумма любых трёх из них меньше четвёртого числа. Какое наименьшее количество отрицательных чисел может быть написано на доске? Ответ обосновать.

**9.2.** Приведённый квадратный трёхчлен  $y = x^2 + ax + b$  имеет два корня. Докажите, что если прибавить к коэффициенту  $a$  любой из этих корней, а из коэффициента  $b$  вычесть квадрат этого же корня, то полученный трёхчлен также будет иметь по крайней мере один корень.

**9.3.** В окружность с центром  $O$  вписан квадрат. Пусть  $M$  — середина его стороны,  $X$  — произвольная точка на окружности,  $T$  — середина отрезка  $OX$ . Докажите, что  $\frac{MX}{MT} = \sqrt{2}$ .

**9.4.** Прогульщик Вася каждый понедельник сентября пропускал по одному уроку, каждый вторник — по два урока, среду — по три, четверг — по четыре и пятницу — по пять уроков. Исключение составило 1 сентября: в этот день Вася в честь начала учебного года уроков не прогуливал. Оказалось, что за весь сентябрь Вася пропустил ровно 64 урока. На какой день недели пришлось 1 сентября? Ответ обосновать. (Все субботы и воскресенья сентября были выходными, а остальные дни учебными.)

**9.5.** В обменном пункте можно совершать только следующие операции:

- 1) обменять 2 золотых монеты на три серебряных и одну медную;
- 2) обменять 5 серебряных монет на три золотых и одну медную.

У Николая были только серебряные монеты. После нескольких посещений обменного пункта серебряных монет у него стало меньше, золотых не появилось, зато появилось 50 медных монет. На сколько уменьшилось количество серебряных монет у Николая? Ответ обоснуйте. Учтите, что обмен денег в банке не является равноценной операцией, то есть при каждом обмене покупательная способность имеющихся у Николая монет несколько уменьшалась.

**9.6.** Конечно или бесконечно множество троек  $(a, b, c)$  целых чисел, для которых верно равенство  $a^2 + b^2 = 2(c^2 + 1)$ ? Ответ обосновать.

**10.1.** Положительные числа  $a, b, c$  таковы, что точка  $A(1; 2)$  расположена ниже графика параболы  $y = ax^2 + bx + c$ . Можно ли однозначно установить, как эта точка расположена (выше, ниже или на) по отношению к графику параболы  $y = cx^2 + bx + a$ ? Ответ обосновать.

**10.2.** В параллелограмме  $ABCD$  известны угол  $\angle A = \alpha$  и диагональ  $BD = d$ . Пусть  $M$  и  $N$  — основания высот, опущенных из вершины  $B$  на прямые  $CD$  и  $AD$  соответственно. Найдите  $MN$ .

**10.3.** На доске написано несколько различных действительных чисел. Известно, что сумма любых трех из них рациональна, а сумма любых двух из них — иррациональна. Какое наибольшее количество чисел может быть написано на доске? Ответ обосновать.

**10.4.** Точку плоскости с координатами  $(x; y)$  разрешено соединить отрезком с точкой, имеющими координаты  $(x + 3y; y)$  или с точкой, имеющей координаты  $(x; y - 2x)$ . Можно ли при таких условиях соединить ломаной точки  $A(19; 47)$  и  $B(12; 17)$ ? Ответ обосновать.

**10.5.** Пусть  $a, b, c$  и  $d$  — натуральные числа и  $\frac{ad-1}{a+1} + \frac{bd-1}{b+1} + \frac{cd-1}{c+1} = d$ . Найдите все значения, которые может принимать число  $d$ .

**10.6.** На заводе работают ровно 217 женщин, среди которых 17 брюнеток, а остальные 200 — блондинки. Перед Новым Годом все они покрасили свои волосы, и каждая из этих женщин написала в «Контакте» фамилии ровно 200 женщин завода, по её мнению, точно являющихся блондинками. При этом каждая из брюнеток указала верно всех блондинок, а каждая блондинка могла указать на кого угодно, кроме себя. Докажите, что на основании этих данных можно выявить по крайней мере 13 блондинок.

**11.1.** Приведённый квадратный трёхчлен  $y = x^2 + ax + b$  имеет корнями действительные числа  $t$  и  $s$  причём  $-1 < t < 0$ . Докажите, что если прибавить к коэффициентам  $a$  и  $b$  корень  $t$ , то полученный трёхчлен также будет иметь два различных действительных корня.

**11.2.** Пусть  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  — плоские углы трёхгранного угла. Докажите, что числа  $\sin \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\beta}{2}$  и  $\sin \frac{\gamma}{2}$  являются длинами сторон некоторого треугольника.

**11.3.** Все 100 натуральных чисел от 2 до 101 разбили на две группы по 50 чисел в каждой. Числа в каждой группе перемножили, и два полученных произведения сложили. Докажите, что эта сумма — составное число.

**11.4.** Решите уравнение  $2^{\sqrt{xy}} + 5^{\sqrt{x+y}} = 3^{-x} + 4^{-y}$ .

**11.5.** Через точку  $M$  внутри круга радиуса  $r$  с центром в точке  $O$  провели две перпендикулярные хорды. Известно, что сумма квадратов длин этих хорд равна  $m^2$ . Найдите длину отрезка  $OM$ .

**11.6.** На заводе работают ровно 217 женщин, среди которых 17 брюнеток, а остальные 200 — блондинки. Перед Новым Годом все они покрасили свои волосы, и каждая из этих женщин написала в «Контакте» фамилии ровно 200 женщин завода, по её мнению, точно являющихся блондинками. При этом каждая из брюнеток указала верно всех блондинок, а каждая блондинка могла указать на кого угодно, кроме себя. Докажите, что на основании этих данных можно выявить по крайней мере 13 блондинок.